

Chapitre n° 8 : Suites de matrices. Applications aux marches aléatoires.

1 Suites de matrices colonnes

Définition 1: Suite de matrices colonnes

Une suite de matrices colonnes de taille $k \geq 2$ est une fonction qui, à tout entier naturel n , associe une matrice colonne de même taille.

Remarque 1: Cette définition prolonge celle de suite numérique. On peut ainsi rencontrer des suites de matrices définies explicitement ou par récurrence.

Exemple 1: Soit (U_n) la suite de matrices colonnes $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, ...

Cette suite peut être définie explicitement avec $U_n = \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2^n \end{pmatrix}$ mais aussi par la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Définition 2: Convergence, limite d'une suite de matrices colonnes

Une suite de matrices colonnes $(U_n) = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ converge si les suites numériques (a_n) et (b_n) convergent. Sa limite est alors la matrice colonne formée par les limites de ces deux suites.

Exemple 2: Soit (U_n) la suite de matrices colonnes de terme général $U_n = \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{n+1} \\ \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 2: On définit naturellement une suite de matrices colonnes de taille supérieure.

Propriété 1: Suites définies par $U_{n+1} = AU_n$

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille k définie par $U_{n+1} = AU_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec A une matrice carrée d'ordre k . Alors, le terme général de (U_n) peut s'écrire $U_n = A^n U_0$.

Preuve 1: On démontre par récurrence sur n . Voici l'initialisation et l'hérédité :

- Initialisation : $U_0 = IU_0 = A^0 U_0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : Si, pour n entier donné, $U_n = A^n U_0$, alors $U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0$.

Méthode 1 (Expliciter U_n pour (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + B$):

EXERCICE

Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- ① Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.
- ② Déterminer la matrice C telle que : $C = AC + B$.
- ③ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - C$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n \times V_0$.
- ④ En déduire une expression U_n en fonction de n .

CORRECTION

2 Marche aléatoire

Définition 3: Marche aléatoire entre deux états

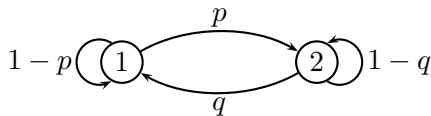
Lorsqu'un système n'ayant que deux états possibles évolue par étapes successives aléatoires et indépendantes, on dit qu'il suit une **marche aléatoire** entre ces deux états.

Exemple 3: Akwa, un chien ayant une puce, rencontre Bali, un autre chien. Chaque seconde, la puce reste sur un chien ou va sur l'autre. On a un système à deux états : l'état 1 (la puce est sur Akwa) et l'état 2 (la puce est sur Bali) dont l'évolution est une marche aléatoire entre ces deux états.

Définition 4: Graphe probabiliste - Matrice de transition

Soit une marche aléatoire entre deux états 1 et 2 avec p la probabilité qu'il passe de 1 à 2 et q la probabilité qu'il passe de 2 à 1. La marche est entièrement déterminé par l'une des deux représentations suivantes :

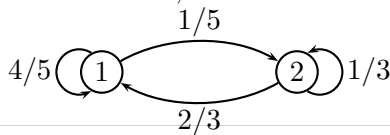
- le **graphe probabiliste** qui schématise les échanges entre 1 et 2 par des arêtes orientées, pondérées par les probabilités de passer d'un état à l'autre ou de rester au même état.
- la **matrice de transition** T est la matrice telle que le coefficient t_{ij} est égal à la probabilité :
 - de passer de l'état i à l'état j lorsque $i \neq j$;
 - de rester à l'état i lorsque $i = j$.



$$T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Remarque 3: Une matrice de transition est dite stochastique : ses coefficients appartiennent à l'intervalle $[0 ; 1]$ et la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

Exemple 4: Reprenons nos chiens et supposons que chaque seconde : soit la puce va d'Akwa (état 1) à Bali (état 2) une fois sur cinq, soit elle va de Bali à Akwa deux fois sur trois, soit elle reste sur le même chien. Alors, la marche aléatoire a pour graphe et matrice de transition :



$$T = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Définition 5: répartition de probabilité à l'étape n

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

- l'événement A_n : « le système est dans l'état A à l'étape n » ;
- l'événement B_n : « le système est dans l'état B à l'étape n » ;
- les probabilités $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$ telles que $a_n + b_n = 1$.

La matrice ligne $M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ est appelée la répartition de probabilité à l'étape n .

Propriété 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $M_{n+1} = M_n T$
- $M_n = M_0 T^n$.

Preuve 2: Faisons un arbre de probabilité du passage de l'étape n à l'étape $n + 1$.

On démontre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $M_n = M_0 T^n$.

Définition 6: répartition stable de probabilité

Propriété 3: convergence d'une marche aléatoire à deux états

Avec les notations précédentes, si $(p ; q) \neq (0 ; 0)$ et $(p ; q) \neq (1 ; 1)$, alors :

Preuve 3:

Méthode 2 (Étudier le comportement asymptotique d'une marche aléatoire):

EXERCICE

Akwa, un chien ayant une puce, rencontre Bali, un chien qui n'en a pas.

Chaque seconde, soit la puce va d'Akwa (état 1) à Bali (état 2) cinq fois sur douze, soit elle va de Bali à Akwa deux fois sur cinq, soit elle reste sur le même chien.

On note $M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la répartition de probabilité au bout de n secondes.

- ① Déterminer le graphe et la matrice de transition T associés à cette marche aléatoire.
- ② Quelle est la répartition de probabilité au bout de 2 secondes ?
- ③ Démontrer que, pour tout n entier naturel, $a_{n+1} = \frac{11}{60}a_n + \frac{2}{5}$.
- ④ On pose $u_n = a_n - \frac{24}{49}$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{11}{60}$.
- ⑤ En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = M = \begin{pmatrix} \frac{24}{49} & \frac{25}{49} \end{pmatrix}$. Interpréter ce résultat.
- ⑥ Vérifier que M est une répartition stable de probabilité, c'est-à-dire que $M = MT$.

CORRECTION

Remarque 4: Pour une marche aléatoire qui comporte trois états ou plus, l'étude asymptotique est similaire. La difficulté des calculs croît évidemment avec le nombre d'états et on aura alors recours à la calculatrice ou à un logiciel de calcul formel.